Präsenzübung zu Gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 0.1

Zeigen Sie:

(a) Das Produkt global Lipschitz-stetiger Funktionen ist nicht notwendigerweise wieder global Lipschitz-stetig.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ ist lokal, aber nicht global Lipschitz-stetig.

Aufgabe 0.2

Betrachten Sie den metrischen Raum (X, d), wobei X eine beliebige Menge und d die diskrete Metrik ist, welche definiert ist durch $d(x, y) := \begin{cases} 0 \text{ für } x = y \\ 1 \text{ für } x \neq y \end{cases}$.

(a) Zeigen Sie, dass bezüglich der diskreten Metrik jede Funktion Lipschitz-stetig ist.

(b) Bestimmen Sie die Menge der Kontraktionen bezüglich der diskreten Metrik.

(c) Zeigen Sie, dass weder $id : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ noch $id : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d)$ Lipschitz-stetig sind.

Aufgabe 0.3

Für eine beliebige Norm $||\cdot||$ auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert man die induzierte Matrixnorm als

$$||A|| := \max_{||x||=1} ||Ax|| \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Bestimmen Sie für die Normen $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ und $||\cdot||_\infty$ jeweils die induzierten Matrixnormen.